Том 27, № 139 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-214-230
УДК 517.95

Задача с нелокальным условием для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками

Андрей Владимирович БОГАТОВ, Антон Владимирович ГИЛЕВ, Людмила Степановна ПУЛЬКИНА

ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева»

443086, Российская Федерация, г. Самара, ул. Московское шоссе, 34

Аннотация. В статье рассмотрена нелокальная задача с интегральным условием для уравнения четвертого порядка. Доказана ее однозначная разрешимость. Доказательство единственности решения базируется на выведенных в работе априорных оценках. Для доказательства существования решения задача сведена к двум задачам Гурса для уравнений второго порядка и доказана эквивалентность поставленной задачи и полученной системы задач Гурса. Одна из задач системы является классической задачей Гурса. Вторая задача представляет собой характеристическую задачу для интегро-дифференциального уравнения с нелокальным интегральным условием на одной из характеристик. К исследованию этой задачи невозможно применить известные методы обоснования разрешимости задач с условиями на характеристиках. Введение новой неизвестной функции позволило свести вторую задачу к уравнению с вполне непрерывным оператором, убедиться на основании теоремы единственности в его разрешимости и, в силу доказанной эквивалентности задач, в разрешимости поставленной задачи.

Ключевые слова: нелокальная задача, уравнение четвертого порядка, интегральные условия, задача Гурса, нагруженное уравнение

Для цитирования: *Богатов А.В., Гилев А.В., Пулькина Л.С.* Задача с нелокальным условием для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 139. С. 214–230. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-214-230.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-214-230

A problem with a non-local condition for a fourth-order equation with multiple characteristics

Andrei V. BOGATOV, Anton V. GILEV, Ludmila S. PULKINA
Samara National Research University
34 Moskovskoye shosse St., Samara 443086, Russian Federation

Abstract. In this article, we consider a non-local problem with an integral condition for a fourth-order equation. The unique solvability of the problem is proved. The proof of the uniqueness of a solution is based on the a priori estimates derived in the paper. To prove the existence of a solution, the problem is reduced to two Goursat problems for second-order equations, and the equivalence of the stated problem and the resulting system of Goursat problems is proved. One of the problems of the system is the classical Goursat problem. The second problem is a characteristic problem for an integro-differential equation with a non-local integral condition on one of the characteristics. It is impossible to apply the well-known methods of substantiating the solvability of problems with conditions on characteristics to the study of this problem. The introduction of a new unknown function made it possible to reduce the second problem to an equation with a completely continuous operator, to verify, on the basis of the uniqueness theorem, that it is solvable and, by virtue of the proven equivalence of the problems, that the problem posed is solvable.

Keywords: non-local problem, fourth-order equation, integral conditions, Goursat problem, loaded equation

Mathematics Subject Classification: 35G15, 45D05.

For citation: Bogatov A.V., Gilev A.V., Pulkina L.S. Zadacha s nelokal'nym usloviyem dlya uravneniya chetvertogo poryadka s kratnymi kharakteristikami [A problem with a non-local condition for a fourth-order equation with multiple characteristics]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 139, pp. 214–230. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-214-230. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В основе математических моделей многих процессов и явлений лежит уравнение четвертого порядка

$$u_{tt} - (au_x)_x - (bu_{xtt})_x + cu = f(x,t),$$

которое можно интерпретировать как обобщение уравнения Буссинеска–Лява [1]. В частности, это уравнение описывает продольные колебания стержня с учетом инерции поперечных смещений элементов стержня [2]. Для этого уравнения рассматривались начально-краевые задачи [3, 4], обратные задачи [5, 6], а также нелокальные задачи [7–10] (статьи, посвященные смежным вопросам, см. в списках литературы цитируемых работ). В предлагаемой работе исследуется задача, одно из условий которой является нелокальным, что весьма затрудняет применение известных классических методов исследования разрешимости поставленной задачи. В настоящее время задачи с нелокальными условиями для уравнений с частными производными продолжают привлекать внимание исследователей. Интерес к этому классу задач обоснован необходимостью построения математических моделей, отвечающих потребностям современного естествознания [11]. Вскоре после выхода статей [12, 13], положивших начало систематическим исследованиям нелокальных задач с интегральными условиями, появился ряд работ, в которых в том или ином качестве присутствуют нелокальные интегральные условия: либо вместо граничных [14, 15, 17], либо в качестве условий переопределения в обратных задачах [18–20].

В большинстве упомянутых выше работ изучены задачи для уравнений второго порядка. Предложенный в данной работе метод позволил доказать существование единственного решения задачи для уравнения четвертого порядка. Доказательство единственности решения базируется на полученных в работе априорных оценках. Для обоснования существования решения используется не совсем обычный прием, который подсказан самим уравнением: учитывая естественное условие $b(x,t) \neq 0$, рассматриваемое уравнение можно трактовать как уравнение с доминирующей производной четвертого порядка [21–23].

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - (au_x)_x - (bu_{xtt})_x + cu = f(x,t), \tag{1.1}$$

в области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$, предполагая, что коэффициенты уравнения и его правая часть — достаточно гладкие функции, $a(x,t) \geq a_0 > 0$, $b(x,t) \geq b_0 > 0$ в $\bar{Q}_T$, и поставим для него следующую задачу.

Задача 1. Найти в Q_T решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad u_x(0,t) = 0, \tag{1.2}$$

$$u(l,t) + \int\limits_0^l K(x)u(x,t)dx = 0. \tag{1.3}$$

Под решением **задачи 1** будем понимать функцию $u \in C^2(\bar{Q}_T)$, $u_{xxtt} \in C(Q_T)$, удовлетворяющую в области Q_T уравнению (1.1) и условиям (1.2), (1.3). Будем также предполагать выполненными условия согласования

$$\varphi(l) + \int\limits_0^l K(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \psi(l) + \int\limits_0^l K(x)\psi(x)dx = 0, \ \varphi'(0) = 0. \tag{1.4}$$

2. Эквивалентная форма задачи 1

Условие (1.3) относится к нелокальным интегральным условиям второго рода. Известно [24], что интегральные условия второго рода могут содержать в качестве внеинтегрального слагаемого как след самого искомого решения, так и его производную по направлению нормали к боковой поверхности. Для исследования нелокальных задач с интегральным условием, содержащим производную, разработан эффективный метод, позволяющий обосновать разрешимость задачи в пространстве Соболева [7,24]. При его реализации удается использовать многие стандартные приемы вывода априорных оценок, на которых в основном базируется доказательство как единственности, так и существования решения. Но этот метод неприменим, если внеинтегральное слагаемое не содержит производной по нормали, и исследование задач с условием такого типа, к которому принадлежит и (1.3), требует иного подхода. В [25] был предложен метод, который затем был развит в работах [26, 27]. Существенным ограничением при реализации этого метода является требование разрешимости интегрального уравнения, неизбежно порождаемого интегральным условием. Снятию этого ограничения посвящены работы [26, 27]. Заметим, что в частном случае, в случае одной пространственной переменной, эту трудность можно легко обойти с помощью приема, разработанного для уравнения второго порядка [24], позволяющего перейти от условия вида (1.3) к условию, содержащему производную по направлению нормали. Мы используем здесь этот прием для уравнения четвертого порядка (1.1), и суть его заключается в утверждении леммы, которая сейчас будет сформулирована и доказана.

Лемма 2.1. *Если $u(x,t)$ — решение **задачи 1**, выполняются условия согласования* (1.4) *и* $K(l) \neq 0$, *то условие* (1.3) *эквивалентно условию*

$$\begin{aligned} &K(l)\big[a(l,t)u_x(l,t) + b(l,t)u_{xtt}(l,t)\big] \\ &= \big(b(l,t)K'(l) - 1\big)u_{tt}(l,t) + b(l,t)K'(0)u_{tt}(0,t) - \int\limits_0^l \big[(K'a)_x - Kc\big]udx \\ &- \int\limits_0^l (K'b)_x u_{tt}dx + K'(l)a(l,t)u(l,t) - K'(0)a(0,t)u(0,t) - \int\limits_0^l Kfdx. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u(x,t)$ — решение **задачи 1**. Дифференцируя (1.3) по t и учитывая, что $u_{tt} = (au_x)_x + (b_{xtt})_x - cu + f$ в силу (1.1), получим равенство

$$u_{tt}(l,t) + \int\limits_0^l K(x)u_{tt}(x,t)dx = u_{tt}(l,t) + \int\limits_0^l K(x)\big[(au_x)_x + (b_{xtt})_x - cu + f\big]dx,$$

интегрируя правую часть которого, получим (2.1).

Пусть теперь $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.1), условиям (1.2) и (2.1). Умножим равенство (1.1) на $K(x)$ и проинтегрируем по $(0,l)$, получим

$$\int\limits_0^l K(x)u_{tt}dx - \int\limits_0^l K(au_x)_x dx - \int\limits_0^l K(x)(bu_{xtt})_x dx + \int\limits_0^l Kcudx = \int\limits_0^l Kf dx.$$

Интегрируя по частям в правой части те слагаемые, которые содержат производные по пространственной переменной под знаком интеграла, и учитывая условие (2.1), получим

$$u_{tt}(l,t) + \int\limits_0^l K(x)u_{tt}(x,t)dx = 0.$$

Представим это равенство следующим образом:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big[u(l,t) + \int\limits_0^l K(x)u(x,t)dx\Big] = 0.$$

В силу начальных условий $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ и условий согласования (1.4) приходим к следующей задаче Коши относительно функции $u(l,t) + \int\limits_0^l K(x)u_{tt}(x,t)dx$:

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big[u(l,t) + \int\limits_0^l K(x)u(x,t)dx\Big] = 0,$$

$$u(l,0) + \int\limits_0^l K(x)u(x,0)dx = 0, \quad u_t(l,0) + \int\limits_0^l K(x)u_t(x,0)dx = 0.$$

Эта задача имеет единственное тривиальное решение $u(l,t) + \int\limits_0^l K(x)u(x,t)dx = 0$, а это и означает, что выполняется условие (1.3). $\square$

Утверждение доказанной леммы дает возможность вместо **задачи 1** с нелокальным условием (1.3) изучать задачу с условием (2.1), которое содержит выражение $a(l,t)u_x(l,t)+ b(l,t)u_{xtt}(l,t)$. Именно присутствие этого выражения в нелокальном условии позволит получить оценку, с помощью которой в следующем разделе будет доказана единственность решения.

Задача 2. Найти в Q_T решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2) и (2.1).

3. Основные результаты

Введем следующие обозначения.

$$\gamma = 1 - b(l,t)K'(l), \quad k_0 = \int_0^l K^2(x)dx,$$

$$H(x,t) = (K'a)_x - cK, \quad H_0 = \max_{[0,T]} \int_0^l H^2(x,t)dx.$$

Теорема 3.1. *Пусть* $a, a_t, b, b_t, c \in C(\bar{Q}_T)$, $K \in C^2(0,l) \cap C^1[0,l]$. *Если справедливы неравенства*

$$\gamma K(l) > 0,\ 1 - \frac{1}{K(l)} \int_0^l K^2(x)dx > 0$$

и выполняется хотя бы одно из двух условий:

$$K(x) = const > 0, \tag{3.1}$$

$$(K'b)_x = K(x), \quad K'(0) = 0, \tag{3.2}$$

то существует не более одного решения ***задачи 2***.

Доказательство. Предположим, что существуют два различных решения, $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, **задачи 2**. Пусть выполняется условие (3.1) теоремы 3.1: $K(x) = k$. Тогда $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнению

$$u_{tt} - (au_x)_x - (bu_{xtt})_x + cu = 0 \tag{3.3}$$

и однородным условиям

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = 0, \tag{3.4}$$

$$a(l,t)u_x(l,t) + b(l,t)u_{xtt}(l,t) = \int\limits_0^l c(x,t)u(x,t)dx - \frac{1}{k}u_{tt}(l,t). \tag{3.5}$$

Умножим (3.3) на $u_t(x,t)$ и проинтегрируем полученное равенство по прямоугольнику $Q_\tau = (0,l) \times (0,\tau)$, $\tau \in [0,T]$

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_0^l \big[u_{tt} - (au_x)_x - (bu_{xtt})_x + cu\big]u_t dxdt = 0.$$

Интегрируя три первых слагаемых по частям, учитывая условия (3.4), получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^l \big[u_t^2(x,\tau) + au_x^2(x,\tau) + bu_{xt}^2(x,\tau)\big]dx + \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l cuu_t dxdt$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau \int\limits_0^l \big[a_t u_x^2 + b_t u_{xt}^2\big]dxdt + \int\limits_0^\tau u_t(l,t)\big[au_x(l,t) + bu_{xtt}(l,t)\big]dt.$$

Используя условие (3.5), преобразуем последнее слагаемое правой части:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int\limits_0^l \big[u_t^2(x,\tau) + au_x^2(x,\tau) + bu_{xt}^2(x,\tau)\big]dx + \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l cuu_t dxdt \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau \int\limits_0^l \big[a_t u_x^2 + b_t u_{xt}^2\big]dxdt - \frac{1}{k}\int\limits_0^\tau u_t(l,t)u_{tt}(l,t)dxdt + \int\limits_0^\tau u_t(l,t)\int\limits_0^l cudxdt.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Поскольку $\int\limits_0^\tau u_t(l,t)u_{tt}(l,t)dt = \frac{1}{2}u_t^2(l,\tau)$ и $k>0$, из (3.6) следует неравенство

$$\int\limits_0^l \left[u_t^2(x,\tau)+a(x,\tau)u_x^2(x,\tau)+b(x,\tau)u_{xt}^2(x,\tau)\right]dx+\frac{1}{k}u_t^2(l,\tau)$$
$$\le 2\Big|\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l cuu_t dxdt\Big| + \Big|\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l \left[a_t u_x^2+b_t u_{xt}^2\right]dxdt\Big| + 2\Big|\int\limits_0^\tau u_t(l,t)\int\limits_0^l cudxdt\Big|. \tag{3.7}$$

Для получения оценки правой части неравенства (3.7) используем неравенства Коши и Коши–Буняковского. Условия теоремы 3.1 гарантируют существование положительных чисел a_1, b_1, c_0, c_1 таких, что $|a_t|\le a_1$, $|b_t|\le b_1$, $|c|\le c_0$, $\int\limits_0^l c^2(x,t)dx \le c_1$. Таким образом, имеем

$$2\Big|\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l cuu_t dxdt\Big| \le c_0\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u^2+u_t^2)dxdt;$$

$$2\Big|\int\limits_0^\tau u_t^2(l,t)\int\limits_0^l cudxdt\Big| \le \int\limits_0^\tau u_t^2(l,t)dt + c_1\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l u^2dxdt.$$

Теперь рассмотрим интеграл, содержащий след производной, и оценим его с помощью следующего полученного в [24] неравенства

$$u^2(l,t)\le 2l\int\limits_0^l u_x^2(x,t)dx + \frac{2}{l}\int\limits_0^l u^2(x,t)dx.$$

Имеем

$$\int\limits_0^\tau u_t^2(l,t)dt \le 2l\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l u_{xt}^2dxdt + \frac{2}{l}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l u_t^2(x,t)dxdt.$$

В результате этих преобразований и оценок неравенство (3.7) приобретает вид

$$\int\limits_0^l [u_t^2(x,\tau)+a(x,\tau)u_x^2(x,\tau)+b(x,\tau)u_{xt}^2(x,\tau)]dx+\frac{1}{k}u_t^2(l,\tau)$$
$$\le \int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (a_1u_x^2+b_1u_{xt}^2)dxdt + c_0\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l \left[u^2+u_t^2\right]dxdt \tag{3.8}$$
$$+2l\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l u_{xt}^2dxdt + \frac{2}{l}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l u_t^2dxdt + c_1\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l u^2dxdt.$$

Из равенства $u(x,\tau)=u(x,0)+\int\limits_0^\tau u_t(x,t)dt = \int\limits_0^\tau u_t(x,t)dt$ получаем

$$\int\limits_0^l u^2(x,\tau)dx \le \tau\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l u_t^2dxdt. \tag{3.9}$$

Обозначим $m = \min\{1, a_0, b_0\}$, $M = \max\left\{c_0+c_1, c_0+\frac{2}{l}+\tau, a_1, b_1+2l\right\}$. В силу неравенств (3.8), (3.9) имеем

$$m\int\limits_0^l \left[u^2(x,\tau)+u_t^2(x,\tau)+u_x^2(x,\tau)+u_{xt}^2(x,\tau)\right]dx+\frac{1}{k}u_t^2(l,\tau)$$
$$\leq M\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l \left(u^2+u_t^2+u_x^2+u_{xt}^2\right)dxdt.$$

Из полученного неравенства следует

$$m\int\limits_0^l \left[u^2(x,\tau)+u_t^2(x,\tau)+u_x^2(x,\tau)+u_{xt}^2(x,\tau)\right]dx \leq M\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u^2+u_t^2+u_x^2+u_{xt}^2)dxdt,$$

откуда в силу леммы Гроноулла (см. [28]) имеем $u(x,t)=0$ в Q_τ. Так как $\tau\in[0,T]$ произвольно, $u(x,t)=0$ всюду в Q_T.

Пусть теперь выполняется условие (3.2). Как и выше, предположим, что существует два различных решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ **задачи 2**. Тогда условие (2.1) для $u=u_1-u_2$ имеет вид

$$\begin{aligned}&a(l,t)u_x(l,t)+b(l,t)u_{xtt}(l,t)\\&=\frac{K'(l)}{K(l)}a(l,t)u(l,t)-\frac{1}{K(l)}\Big[\gamma u_{tt}(l,t)+\int_0^l H(x,t)u(x,t)dx+\int_0^l Ku_{tt}dx\Big].\end{aligned}$$

Интегрирование равенства (3.3), умноженного на u_t, приводит к соотношению

$$\begin{aligned}&\int_0^l[u_t^2(x,\tau)+a(x,\tau)u_x^2(x,\tau)+b(x,\tau)u_{xt}^2(x,\tau)]dx\\&+2\int_0^\tau\int_0^l cuu_tdxdt-\int_0^\tau\int_0^l a_tu_x^2dxdt-\int_0^\tau\int_0^l b_tu_{xt}^2dx+\\&\frac{2}{K(l)}\int_0^\tau u_t(l,t)\Big[\gamma u_{tt}(l,t)+\int_0^l Hudx+\int_0^l Kudx-K'(l)a(l,t)u(l,t)\Big]dt=0.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Кроме вычислений, сделанных для случая (3.1), нам потребуются еще следующие. Учитывая условия (1.3) и (3.2), имеем

$$\int_0^\tau u_t(l,t)\int_0^l Ku_{tt}dxdt=\int_0^\tau\int_0^l Ku_tdx\int_0^l Ku_{tt}dxdt.$$

Интегрирование по частям правой части этого равенства приводит к равенству

$$\int_0^\tau u_t(l,t)\int_0^l Ku_{tt}dxdt=\frac{1}{2}\Big(\int_0^l K(x)u_t(x,\tau)dx\Big)^2.$$

С учетом проделанных преобразований и условий теоремы перепишем (3.10) следующим образом

$$\int_0^l \big[u_t^2(x,\tau)+a(x,\tau)u_x^2(x,\tau)+b(x,\tau)u_{xt}^2(x,\tau)\big]dx+\frac{\gamma}{K(l)}u_t^2(l,\tau)$$
$$=\int_0^\tau\int_0^l a_t u_x^2dxdt+\int_0^\tau\int_0^l b_t u_{xt}^2dxdt-\frac{2}{K(l)}\int_0^\tau u_t(l,t)\int_0^l Hudxdt$$
$$-\frac{1}{K(l)}\Big(\int_0^l Ku_t(x,\tau)dx\Big)^2+\frac{K'(l)}{K(l)}\int_0^\tau a(l,t)u(l,t)u_t(l,t)dt-2\int_0^\tau\int_0^l cuu_tdxdt.$$

Из этого равенства следует неравенство

$$\int_0^l \big[u_t^2(x,\tau)+a(x,\tau)u_x^2(x,\tau)+b(x,\tau)u_{xt}^2(x,\tau)\big]dx+\frac{\gamma}{K(l)}u_t^2(l,\tau)$$
$$\le\int_0^\tau\int_0^l |a_t|u_x^2dxdt+\int_0^\tau\int_0^l |b_t|u_{xt}^2dxdt+\Big|\frac{2}{K(l)}\int_0^\tau u_t(l,t)\int_0^l Hudxdt\Big|$$
$$+\Big|\frac{1}{K(l)}\Big|\Big(\int_0^l Ku_t(x,\tau)dx\Big)^2+\Big|\frac{K'(l)}{K(l)}\int_0^\tau a(l,t)u(l,t)u_t(l,t)dt\Big|+2\Big|\int_0^\tau\int_0^l cuu_tdxdt\Big|.$$

В полученном неравенстве оценим слагаемые правой части, отсутствовавшие при исследовании случая (3.1). Имеем

$$2\Big|\int_0^\tau u_t(l,t)\int_0^l Hudxdt\Big|\le\int_0^\tau u_t^2(l,t)dt+\int_0^\tau\Big(\int_0^l Hudx\Big)^2dt$$
$$\le 2l\int_0^\tau\int_0^l u_{xt}^2dxdt+\frac{2}{l}\int_0^\tau\int_0^l u_t^2dxdt+H_0\int_0^\tau\int_0^l u^2dxdt;$$
$$\Big(\int_0^l Ku_tdx\Big)^2\le k_0\int_0^l u_t^2(x,\tau)dx.$$

Так как по условию теоремы $\nu=1-\frac{k_0}{K(l)}>0$, то, используя найденные оценки и неравенство (3.9), получаем

$$m\int_0^l[u^2(x,\tau)+u_t^2(x,\tau)+u_x^2(x,\tau)+u_{xt}^2(x,\tau)]dx\le M\int_0^\tau\int_0^l[u^2+u_t^2+u_x^2+u_{xt}^2]dxdt,$$

где $m=\min\{1,\nu,a_0,b_0\}$, $M=\max\big\{a_1,b_1,c_0+H_0,c_0+\tau+\frac{2}{lK(l)}\big\}$. Из этого неравенства, справедливого при любом $\tau\in[0,T]$, в силу леммы Гроноулла следует $u(x,t)=0$ в Q_T, а это означает, что не может существовать более одного решения **задачи 2**. □

Теорема 3.2. *Пусть $f\in C(Q)$, $\varphi\in C^1([0,l])$, $\psi\in C([0,l])$. Тогда при выполнении условий теоремы 3.1 решение* ***задачи 2*** *существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство существования решения начально-краевой **задачи 2** с нелокальным условием (2.1) проведем следующим образом.

1. Сведем начально-краевую **задачу 1** для уравнения четвертого порядка к двум задачам Гурса $G1, G2$ для уравнений второго порядка.

2. Покажем, что **задача 2** эквивалентна совокупности двух задач $G1$ и $G2$.

3. Докажем разрешимость задач $G1$ и $G2$.

4. Убедимся в существовании решения **задачи 2** и, в силу леммы 2.1, в существовании решения **задачи 1**.

Приступим к реализации данного плана.

1. Так как по предположению коэффициент $b(x,t)$ в $\bar{Q}_T$ не обращается в нуль, то уравнение (1.1) можно переписать в виде

$$u_{xxtt} + \frac{1}{b}\big[(au_x)_x - u_{tt} + b_x u_{xtt} - cu\big] = -\frac{1}{b} f(x,t).$$

Не слишком ограничивая общность будем считать $b = const$. Тогда получим простой и удобный для дальнейших исследований вид уравнения

$$u_{xxtt} + (Au_x)_x + (Bu_t)_t + Cu = F(x,t), \tag{3.11}$$

где обозначено

$$A = \frac{a(x,t)}{b},\ B = -\frac{1}{b},\ C = -\frac{c(x,t)}{b},\ F(x,t) = -\frac{f(x,t)}{b}.$$

Уравнения вида (3.11) в последнее время стало принято называть уравнениями с доминирующей производной [21]. Запишем уравнение (3.11) следующим образом:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\Big[u_{xt} + \int\limits_0^t Au_x d\tau + \int\limits_0^x Bu_t d\xi + \int\limits_0^t \int\limits_0^x Cu d\xi d\tau\Big] = F(x,t). \tag{3.12}$$

Введем новую неизвестную функцию $v(x,t)$, положив

$$v(x,t) = u_{xt} + \int\limits_0^t Au_x d\tau + \int\limits_0^x Bu_t d\xi + \int\limits_0^t \int\limits_0^x Cu d\xi d\tau.$$

Тогда, если $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (3.11), а следовательно, и уравнению (3.12), с условиями $u_x(0,t) = 0$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, то $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению $v_{xt} = F(x,t)$ с условиями $v(0,t) = 0$, $v(x,0) = \psi(x) + \int\limits_0^x B\psi(\xi)d\xi = \Psi(x)$.

Таким образом, мы пришли к двум следующим задачам Гурса.

Задача G1. Найти в Q_T решение уравнения

$$v_{xt} = F(x,t),$$

удовлетворяющее условиям

$$v(0,t) = 0,\ v(x,0) = \Psi(x).$$

Задача G2. Найти в Q_T решение уравнения

$$u_{xt} + \int\limits_0^t Au_x d\tau + \int\limits_0^x Bu_t d\xi + \int\limits_0^t \int\limits_0^x Cu d\xi d\tau = v(x,t), \tag{3.13}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u(l,t) + \int\limits_0^l K(x)u(x,t)dx = 0. \tag{3.14}$$

2. Пусть $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению $v_{xt}=F(x,t)$ и условиям $v(0,t)=0$, $v(x,0)=\psi'(x)+\int\limits_0^x B\psi(\xi)d\xi=\Psi(x)$, а $u(x,t)$ — решение уравнения (3.13). Если $u(x,t)$ удовлетворяет условиям $u(x,0)=\varphi(x)$, $u(l,t)+\int\limits_0^l K(x)u(x,t)dx=0$, то $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (3.11) и, стало быть, уравнению (1.1), в котором учтены предположения о коэффициентах, сделанные выше. Так как мы предположили выполнение условий $v(0,t)=0$, $v(x,0)=\psi'(x)+\int\limits_0^x B\psi(\xi)d\xi$, то, записав их в терминах $u(x,t)$, получим

$$\begin{gathered}u_{xt}(0,t)+\int\limits_0^t Au_x(0,\tau)d\tau=0,\\ u_{xt}(x,0)+\int\limits_0^x Bu_t(\xi,0)d\xi=\psi'(x)+\int\limits_0^x B\psi(\xi)d\xi.\end{gathered}\tag{3.15}$$

Интегрируя по t первое из этих соотношений, получим

$$u_x(0,t)-u_x(0,0)+\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau Au_x(0,\tau')d\tau'd\tau=0.$$

Изменив порядок интегрирования и учтя $u_x(0,0)=\varphi'(0)=0$, получим равенство

$$u_x(0,t)+\int\limits_0^t(t-\tau)A(0,\tau)u_x(0,\tau)d\tau=0,$$

рассматривая которое как интегральное уравнение Вольтерры с ограниченным ядром $(t-\tau)A(0,\tau)$ убеждаемся в том, что оно имеет единственное решение. Таким образом, $u_x(0,t)=0$, т. е. выполняется условие **задачи 2**.

Интегрируя по x второе из соотношений (3.15), изменив так же, как и выше порядок интегрирования и учитывая, что $u_t(0,0)=\psi(0)=0$, получим уравнение

$$u_t(x,0)+\int\limits_0^x(x-\xi)Bu_t(\xi,0)d\xi=\psi(x)+\int\limits_0^x(x-\xi)B\psi(\xi)d\xi.\tag{3.16}$$

Уравнение (3.16) является уравнением Вольтерры с ограниченным ядром и поэтому имеет единственное решение, очевидно, это функция $u_t(x,0)=\psi(x)$.

Итак, все условия **задачи 2** выполнены, и эквивалентность доказана.

3. Рассмотрим задачу $G1$. Общее решение уравнения $v_{xt}=F(x,t)$ имеет вид

$$v(x,t)=f(x)+g(t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^x F(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

где $f(x)$, $g(t)$ — любые дифференцируемые функции. Учитывая условия $v(0,t)=0$, $v(x,0)=\Psi(x)$, получим, что решение задачи $G1$ единственно и определяется формулой

$$v(x,t)=\Psi(x)+\int\limits_0^t\int\limits_0^x F(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Рассмотрим задачу $G2$. Она представляет собой нагруженное уравнение с нелокальным условием. Вначале преобразуем уравнение (3.13), введя новую функцию

$$V(x,t) = u_{xt}. \tag{3.17}$$

Полагаем выполненными условия согласования

$$\varphi(l) + \int_0^l K(x)\varphi(x)dx = 0.$$

Интегрируя (3.17) по соответствующей переменной и учитывая условия (3.14), чтобы выразить u_t и u_x через V, получим соотношения:

$$u_x(x,t) = \int_0^t V(x,\tau)d\tau + \varphi'(x),$$

$$u_t(x,t) + \int_0^l K(x)u_t(x,t)dx = -\int_x^l V(\xi,t)d\xi,$$

$$u(x,t) + \int_0^l K(x)u(x,t)dx = \varphi(x) - \varphi(l) - \int_0^t \int_x^l V(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

В последнем интегральном уравнении ядро зависит лишь от одной переменной. Обозначим $\int_0^l K(x)u(x,t)dx = g(t)$. Если решение уравнения существует, то оно имеет вид

$$u(x,t) = \varphi(x) - \varphi(l) - \int_0^t \int_x^l V(\xi,\tau)d\xi d\tau - g(t).$$

Найдем $g(t)$ из равенств

$$g(t) = \int_0^l K(x)u(x,t)dx = \int_0^l K(x)\big[\varphi(x) - \varphi(l) - \int_0^t \int_x^l V(\xi,\tau)d\xi d\tau - g(t)\big]dx.$$

Обозначим

$$\int_0^l K(x)dx = k_0, \quad (1+k_0)^{-1} = \kappa, \quad \int_0^x K(\xi)d\xi = \tilde{K}(x).$$

Если $k_0 \neq -1$, то

$$g(t) = \kappa \int_0^l K(x)[\varphi(x) - \varphi(l) - \int_0^t \int_x^l V(\xi,\tau)d\xi d\tau]dx.$$

Преобразовав последнее слагаемое, изменив порядок интегрирования и учтя условие согласования, получим

$$u(x,t) = \kappa \int_0^l \int_0^t \tilde{K}(x)V(x,\tau)d\tau dx - \int_x^l \int_0^t V(\xi,\tau)d\tau d\xi + \varphi(x). \tag{3.18}$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что (3.18) действительно является единственным решением исследуемого интегрального уравнения.

Подставим функцию, найденную в виде (3.18), в уравнение (3.13) и получим

$$\begin{aligned}V(x,t)+\int_0^t A(x,\tau)\int_0^\tau V(x,\tau')d\tau' d\tau+\kappa\int_0^x B(\xi,t)\int_0^l \tilde K(\xi')V(\xi',t)d\xi' d\xi\\-\int_0^x B(\xi,t)\int_\xi^l V(\xi',t)d\xi' d\xi-\int_0^t\int_0^x C(\xi,\tau)\int_\xi^l\int_0^\tau V(\xi',\tau')d\tau' d\xi' d\xi d\tau\\+\kappa\int_0^t\int_0^x C(\xi,\tau)\int_0^l\int_0^\tau \tilde K(\xi')V(\xi',\tau')d\tau' d\xi' d\xi d\tau=\tilde v(x,t),\end{aligned}\tag{3.19}$$

где мы обозначили

$$\tilde v(x,t)=v(x,t)-\int_0^t A(x,\tau)\varphi'(x)d\tau-\int_0^t\int_0^x C(\xi,\tau)\varphi(\xi)d\xi d\tau.$$

Изменим во входящих в (3.19) интегралах порядок интегрирования и обозначим

$$\tilde A(x,t,\tau)=\int_\tau^t A(x,\tau')d\tau',\quad \tilde B(\xi,x,t)=\tilde K(\xi)\int_0^x B(\xi,t)d\xi,\quad B_1(x,t)=\int_0^x B(\xi,t)d\xi,$$

$$C_1(x,t,\tau)=\int_\tau^t\int_0^x C(\xi,\tau')d\xi d\tau',\quad \tilde C(x,\xi,t,\tau)=\tilde K(\xi)C_1(x,t,\tau).$$

После сделанных преобразований уравнение (3.19) принимает вид

$$\begin{aligned}V(x,t)+\int_0^t \tilde A(x,t,\tau)V(x,\tau)d\tau+\kappa\int_0^x \tilde B(x,\xi,t)V(\xi,t)d\xi\\-\int_0^x B_1(\xi,t)V(\xi,t)d\xi-\int_x^l B_1(x,t)V(\xi,t)d\xi+\kappa\int_0^t\int_0^l \tilde C(x,\xi,t,\tau)V(\xi,\tau)d\xi d\tau\\-\int_0^t\int_0^x C_1(\xi,t,\tau)V(\xi,\tau)d\xi d\tau-\int_0^t\int_x^l C_1(x,t,\tau)V(\xi,\tau)d\xi d\tau\\=\tilde v(x,t)+\varphi(l)\int_0^t\int_0^x C(\xi,\tau)d\xi d\tau+\kappa\int_0^t\int_x^l C(\xi,\tau)\int_0^l K(\xi')\varphi(\xi')d\xi' d\xi d\tau.\end{aligned}$$

Введем еще следующие обозначения

$$\tilde B_2(\xi,t)=\kappa\tilde B(\xi,t)-B_1(\xi,t),\quad \tilde C_2(x,\xi,t,\tau)=\kappa\tilde C(x,\xi,t,\tau)-\tilde C_1(x,\xi,t,\tau),$$
$$\tilde C_1(x,\xi,t,\tau)=\{C_1(\xi,t,\tau),\ \xi\le x,\ \ C_1(x,t,\tau),\ x\le\xi\},$$
$$\bar v(x,t)=\tilde v(x,t)+\varphi(l)\int_0^t\int_0^x C(\xi,\tau)d\xi d\tau+\kappa\int_0^t\int_x^l C(\xi,\tau)\int_0^l K(\xi')\varphi(\xi')d\xi' d\xi d\tau,$$

используя которые, представим уравнение (3.19) в виде

$$\begin{aligned}V(x,t)+\int_0^t \tilde A(x,t,\tau)V(x,\tau)d\tau+\int_0^x \tilde B_2(\xi,t)V(\xi,t)d\xi\\-\int_x^l B_1(x,t)V(\xi,t)d\xi+\int_0^t\int_0^l \tilde C_2(x,\xi,t,\tau)V(\xi,\tau)d\xi d\tau=\bar v(x,t).\end{aligned}\tag{3.20}$$

Рассмотрим оператор

$$\begin{aligned}\mathcal{T}V=\int_0^t \tilde A(x,t,\tau)V(x,\tau)d\tau+\int_0^x \tilde B_2(\xi,t)V(\xi,t)d\xi\\-\int_x^l B_1(x,t)V(\xi,t)d\xi+\int_0^t\int_0^l \tilde C_2(x,\xi,t,\tau)V(\xi,\tau)d\xi d\tau\end{aligned}$$

и представим уравнение (3.20) в операторной форме

$$V + \mathcal{T}V = \bar{v}. \tag{3.21}$$

Это уравнение разрешимо, так как оператор $\mathcal{T}$, действующий из $C(\bar{\Omega})$ в $C(\bar{\Omega})$, является вполне непрерывным (это легко проверить, учитывая условия на коэффициенты исходного уравнения и представления коэффициентов в (3.20)).

Так как однородная задача, соответствующая **задаче 1**, сводится описанным выше способом к однородному операторному уравнению (3.21), то из теоремы 3.1 следует, что однородное операторное уравнение имеет только тривиальные решения. Отсюда и следует разрешимость уравнения (3.19).

Итак, существует единственное решение уравнения (3.19). Так как $V(x,t) = u_{xt}$, то после преобразований с учетом введенных обозначений придем к уравнению (3.13) относительно функции $u(x,t)$. Следовательно, если $V(x,t)$ — решение (3.19), то $u(x,t)$ — решение (3.13). Покажем, что выполняются и условия (3.14). Для этого используем полученные выше соотношения между $V(x,t)$ и u. Положив в (3.18) $t = 0$, получим

$$u(x,0) = \varphi(x) - \varphi(l) - \kappa \int_0^l K(x)\varphi(x)dx + \kappa k_0 \varphi(l).$$

Из этого соотношения, так как $\kappa = \frac{1}{1+k_0} = 1 - \frac{k_0}{1+k_0}$, в силу условий согласования следует

$$u(x,0) = \varphi(x) - \kappa\varphi(l) - \kappa \int_0^l K(x)\varphi(x) = \varphi(x).$$

Положив теперь в том же равенстве (3.18) $x = l$, получим

$$u(l,t) = \kappa \int_0^l \int_0^t \tilde{K}(x)V(x,\tau)dxd\tau + \varphi(l).$$

Заменим $V(x,t)$ на $u_{xt}(x,t)$, учтем обозначение $\tilde{K}(x) = \int_0^x K(\xi)d\xi$ и дважды проинтегрируем. Получим

$$u(l,t) = k_0\kappa u(l,t) - k_0\kappa u(l,0) - \kappa \int_0^l K(x)u(x,t)dx + \kappa \int_0^l K(x)u(x,0)dx + \varphi(l).$$

Так как справедливы равенства

$$1 - k_0\kappa = \kappa, \quad u(l,0) = \varphi(l)$$

и выполняются условия согласования

$$\varphi(l) + \int_0^l K(x)\varphi(x)dx = 0,$$

то

$$\kappa u(l,t) + \kappa \int_0^l K(x)u(x,t)dx = 0,$$

откуда сразу следует выполнение нелокального условия (1.3). □

References

[1] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sons, London, 1974.

[2] J. S. Rao, *Advanced Theory of Vibration*, Wiley, New York, 1992.

[3] A. Favini, S. A. Zagrebina, G. A. Sviridyuk, "Multipoint initial-final value problems for dynamical Sobolev-type equations in the space of noises", *EJDE*, **2018**:128 (2018), 1–10.

[4] А. А. Замышляева, А. В. Юзеева, "Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска-Лява", *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, 2010, № 5, 23–31. [A. A. Zamyshlyaeva, A. V. Yuzeeva, "The initial-finish value problem for the Boussinesq–Löve equation", *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, 2010, № 5, 23–31 (In Russian)].

[5] Я. Т. Мегралиев, Ф. Х. Ализаде, "Обратная краевая задача для одного уравнения Буссинеска четвертого порядка с несамосопряженными краевыми и с дополнительными интегральными условиями", *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*, 2017, № 2, 17–36. [Ya. T. Megraliev, F. H. Alizade, "An inverse problem for a fourth-order Boussinesq equation with non-conjugate boundary and integral overdetermination conditions", *Vestnik TVGU. Ser. Prikl. Matem. [Herald of Tver State University. Ser. Appl. Math.]*, 2017, № 2, 17–36 (In Russian)].

[6] Г. В. Намсараева, "Линейные обратные задачи для некоторых аналогов уравнения Буссинеска", *Математические заметки СВФУ*, **21**:2 (2014), 47–59. [G. V. Namsaraeva, "Linear inverse problems for some analogues of the Boussinesq equation", *Mathematical Notes of NEFU*, **21**:2 (2014), 47–59 (In Russian)].

[7] L. Pulkina, "Solution to nonlocal problems of pseudohyperbolic equations", *EJDE*, **2014**:116 (2014), 1–49.

[8] L. S. Pulkina, A. B. Beylin, "Nonlocal approach to problems on longitudinal vibration in a short bar", *EJDE*, **2019**:29 (2019), 1–9.

[9] А. А. Алсыкова, "О разрешимости пространственно-нелокальных краевых задач для некоторых аналогов уравнения Буссинеска", *Математические заметки СВФУ*, **23**:1 (2016), 3–11. [A. A. Alsykova, "Nonlocal problems with integral conditions for Boussinesq equation", *Mathematical Notes of NEFU*, **23**:1 (2016), 3–11 (In Russian)].

[10] Н. С. Попов, "О разрешимости краевых задач для многомерных псевдогиперболических уравнений с нелокальным граничным условием интегрального вида", *Математические заметки СВФУ*, **21**:2 (2014), 69–80. [N. S. Popov, "On the solvability of boundary value problems for multidimensional pseudohyperbolic equations with a nonlocal integral boundary condition", *Mathematical Notes of NEFU*, **21**:2 (2014), 69–80 (In Russian)].

[11] Z. P. Ba *ž* ant, M. Jir *á* sek, "Nonlocal Integral Formulation of Plasticity And Damage: Survey of Progress", *American Society of Civil Engineers. Journal of Engineering Mechanics*, **128**:11 (2002), 1119–1149.

[12] J. R. Cannon, "The solution of the heat equation subject to the specification of energy", *Quart. Appl. Math.*, **21**:2 (1963), 155–160.

[13] Л. И. Камынин, "Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **4**:6 (1964), 1006–1024; англ. пер.:L. I. Kamynin, "A boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition", *Comput. Math. Math. Phys.*, **4**:6 (1964), 33–59.

[14] Н. И. Ионкин, "Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием", *Дифференц. уравнения*, **13**:2 (1977), 294–304. [N. I. Ionkin, "The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition", *Differ. Uravn.*, **13**:2 (1977), 294–304 (In Russian)].

[15] А. А. Керефов, М. Х. Шхануков-Лафишев, Р. С. Кулиев, "Краевые задачи для нагруженного уравнения теплопроводности с нелокальными условиями типа Стеклова", *Неклассические уравнения математической физики*, Труды семинара, посвященного 60-летию проф. В. Н. Врагова (Новосибирск, 3–5 октября 2005), Институт математики СО РАН, Новосибирск, 2005, 152–159. [A. A. Kerefov, M. Kh. Shkhanukov–Lafishev, R. S. Kuliev, "Boundary value problems for the loaded heat equation with nonlocal Steklov type conditions", *Nonclassical Equations of Mathematical Physics*, Proceedings of the Seminar Dedicated to the 60th Birth Anniversary of Professor V. N. Vragov (Novosibirsk, October 3-5, 2005), Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 2005, 152–159 (In Russian)].

[16] А. И. Кожанов, “Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера”, *Дифференц. уравнения*, **40**:6 (2004), 763–774; англ. пер.:A. I. Kozhanov, “On a nonlocal boundary value problem with variable coefficients for the heat equation and the Aller equation”, *Differ. Equ.*, **40**:6 (2004), 815–826.

[17] Н. И. Иванчов, “Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями”, *Дифференц. уравнения*, **40**:4 (2004), 547–564; англ. пер.:N. I. Ivanchov, “Boundary value problems for a parabolic equation with integral conditions”, *Differ. Equ.*, **40**:4 (2004), 591–609.

[18] J. R. Cannon, J. van der Hoek, “The classical solution of the one-dimensional two-phase stefan problem with energy specification”, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **130**:1 (1982), 385–398.

[19] J. R. Cannon, Y. Lin, “Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations”, *Inverse Problems*, **4**:1 (1988), 35–45.

[20] В. Л. Камынин, “Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения”, *Матем. заметки*, **94**:2 (2013), 207–217; англ. пер.:V. L. Kamynin, “The inverse problem of determining the lower-order coefficient in parabolic equations with integral observation”, *Math. Notes*, **94**:2 (2013), 205–213.

[21] В. И. Жегалов, А. Н. Миронов, Е. А. Уткина, *Уравнения с доминирующей частной производной*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, 2014, ISBN: 978-5-00019-305-1, 385 с. [V. I. Zhegalov, A. N. Mironov, E. A. Utkina, *Equations with Dominant Partial Derivative*, Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, 2014, ISBN: 978-5-00019-305-1 (In Russian), 385 pp.]

[22] В. И. Жегалов, “Об одной задаче для обобщенного уравнения Буссинеска-Лява”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **23**:4 (2019), 771–776. [V. I. Zhegalov, “On a proplem for generalized Boussinesq–Love equation”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*, **23**:4 (2019), 771–776 (In Russian)].

[23] Е. А. Уткина, “О единственности решения задач с нормальными производными в граничных условиях для уравнения Буссинеска–Лява”, *Изв. вузов. Матем.*, 2017, № 7, 67–73; англ. пер.:E. A. Utkina, “On uniqueness of solution to a problems with normal derivatives in boundary conditions for the Boussinesq–Love equation”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **61**:7 (2017), 58–63.

[24] Л. С. Пулькина, “Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода”, *Изв. вузов. Матем.*, 2012, № 4, 74–83; англ. пер.:L. S. Pul’kina, “Boundary-value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **56**:4 (2012), 62–69.

[25] А. И. Кожанов, Л. С. Пулькина, “О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **42**:9 (2006), 1166–1179; англ. пер.:A. I. Kozhanov, L. S. Pul’kina, “On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations”, *Differ. Equ.*, **42**:9 (2006), 1233–1246.

[26] А. И. Кожанов, А. В. Дюжева, “Нелокальные задачи с интегральным смещением для параболических уравнений высокого порядка”, *Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика*, **36** (2021), 14–28. [A. I. Kozhanov, A. V. Dyuzheva, “Non-local problems with integral displacement for high-order parabolic equations”, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, **36** (2021), 14–28 (In Russian)].

[27] А. И. Кожанов, А. В. Дюжева, “Вторая начально-краевая задача с интегральным смещением для гиперболических и параболических уравнений второго порядка”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **25**:3 (2021), 423–434. [A. I. Kozhanov, A. V. Dyuzheva, “The second initial-boundary value problem with integral displacement for second-order hyperbolic and parabolic equations”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*, **25**:3 (2021), 423–434 (In Russian)].

[28] Л. Гординг, *Задача Коши для гиперболических уравнений*, Издательство иностранной литературы, М., 1961. [L. Gording, *The Cauchy Problem for Hyperbolic Equations*, Foreign Literature Publishing House, Moscow, 1961 (In Russian)].

Информация об авторах

Богатов Андрей Владимирович, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений и теории управления. Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, г. Самара, Российская Федерация. E-mail: andrebogato@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5797-1930

Гилев Антон Владимирович, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений и теории управления. Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, г. Самара, Российская Федерация. E-mail: toshqaaa@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6747-5826

Пулькина Людмила Степановна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления. Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, г. Самара, Российская Федерация. E-mail: louise@samdiff.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7947-6121

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Пулькина Людмила Степановна
E-mail: ludmila.pulkina@gmail.com

Поступила в редакцию 15.06.2022 г.
Поступила после рецензирования 23.08.2022 г.
Принята к публикации 13.09.2022 г.

Information about the authors

Andrei V. Bogatov, Post-Graduate Student, Differential Equations and Control Theory Department. Samara National Research University, Samara, Russian Federation. E-mail: andrebogato@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5797-1930

Anton V. Gilev, Post-Graduate Student, Differential Equations and Control Theory Department. Samara National Research University, Samara, Russian Federation. E-mail: toshqaaa@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6747-5826

Ludmila S. Pulkina, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Differential Equations and Control Theory Department. Samara National Research University, Samara, Russian Federation. E-mail: louise@samdiff.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7947-6121

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Ludmila S. Pulkina
E-mail: ludmila.pulkina@gmail.com

Received 15.06.2022
Reviewed 23.08.2022
Accepted for press 13.09.2022